142. 常微分方程式ノ解ノ單獨條件ニ就テ

福原満洲雄（北大）

前回デ，從來ハ

(1) $$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ニ關スル解ノ單独條件ヲ

(2) $$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqq F(x,y_1-y_2)$$

ナル形デ求メテ居タガ、サウイフ形ヲ持タナイ單独條件ガ得ラレル筈デアルコトヲ述ベタ。此ノ問題ニ關シテ未ダ纏ッタ結果ヲ得テ居ナイノデアルカラ簡單ナ場合ヲ例ニ取ッテ，私ノ考ヘヲ荒削リノママ述ベルコトニスル。変數ハ勿論實トスル。

一般ニ

(3) $$\frac{dy}{dx}=G(y)$$

ニ於テ $G(y)$ ガ y_0 デ連續デ 0 ニ等シクナケレバ此ノ微分方程式ハ $y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル解ヲ唯一ツ持ツノデアルカラ、一般ニ $f(x,y)$ ガ (x_0,y_0) デ連續デ 0 ニ等シクナク且ツ

(4) $$f(x,y_1)-f(x,y_2)<G(y_1)-G(y_2)\qquad (y_1>y_2)$$

ヲ満足シテ居レバ $y(x_0)=y_0$ ヲ満足スル

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

ノ解ハ唯一ツデアルトハ言ヘナイデアラウカ？カウイフ疑問ガ起ルノハ當然デアルガ、ソレヲ解クニ當ツテ從來ノ方法ハ役ニ立タナイヤウニ見エル。其ノ理由ノ説明ナド結果ニ重キヲ置ク人ニ取ツテハツマラナイコトカモ知レナイガ、問題發生ノ原因ヲ究明スルコトモ決シテ輕々ニ看過スベキデハナカラウシ、ソレガドウイフ風ニ發展スベキカトイフコトノ考察モ怠ッテハナラナイト思ヒ説明ヲ附ケ加ヘルノデアル。

條件(4)ノ形ヲ見テ、ソレガ(2)ノ形ニナラナイカラ從來ノ方法デハ駄目ト結論スルノハ早過ギル、ト云フノハ Montel（方程式ガ一ツノ場合），Marchaud（聯立方程式ノ場合）等ハ條件ヲ

$$(5)\qquad f(x,y)-f(x,y_1(x))\leqq F(x,y_1(x),y-y_1(x))$$

ナル形ニシテ居ル、茲ニ $y_1(x)$ ハ(1)ノ一ツノ解デアル、條件ヲ

$$f(x,y)\leqq F(x,y)$$

ナル形ニシテ $f(x,0)=0$ ト假定シ $y(x_0)=0$ ヲ滿足スル(1)ノ解ヲ考ヘテモ本質的ニハ同ジデアル。此ノ方ガ式ガ簡單ニナルカラ私ハ常ニ此ノ形デ論ジテ居ル。

$$F(x,y,z)=G(y+z)-G(z)$$

ト置クコトニヨリ條件(4)ノ場合ガ含マレル．ソレデハ條件(4)ヲ論ズルコトガ出來ルノカト思フト，ソウ簡單ニ行カナイ．$y_1(x)$ ヲ $y(x_0)=y_0$ ヲ滿足スル(1)ノ一ツノ解トシタ時

$$(6)\qquad \frac{dz}{dx}=G(z+y_1(x))-G(y_1(x))$$

ガ $z=0$ ヨリ他ニ $z(x_0)=0$ ヲ滿足スル解ヲ持タナイナラバ (1) ニ關スル解ノ單獨性ガ證明サレル。併シ解ノ單獨性ガ分ツテ居ルノハ (3) デアツテ (6) デハナイ、從來ノ方法ヲ直接ニ條件 (4) ニ應用スルコトガ出來ナイ理由ハココニアル、敢テ直接ニトイフワケハ變數ノ變換ヲ施シテカラナラバ應用出來ルカラデアル。

- 2 -

成ルベク筋道ガハッキリ分ルヤウニ $f(x_0, y_0)=1$, $G(y_0)=1$, $x_0=y_0=0$ トシテ置ク、$y(x_0)=y_0$ ヲ滿足スル

$$(7)\qquad \frac{dy}{dx}=G(y)+h(x) \qquad [h(x_0)=0]$$

ノ解ガ二ツアルトシ、其等ヲ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ デ表ハセバ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ハ

$$\varphi(x)=x(1+\varphi_1(x)), \qquad \psi(x)=x(1+\psi_1(x))$$

ナル形ニ表ハサレル．茲ニ $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ ハ $x=0$ デ 0 ニナル連續ナ函數デアル。

$\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ ハ

$$x(1+\eta)=y$$

ナル變換ニ依ツテ得ラレル方程式

$$(8) \qquad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{\eta + 1 - G(x(1+\eta)) - h(x)}{x}$$

ノ解デアル、此ノ方程式ニ關スル解ノ單獨性ガ分レバ

$\varphi_1(x) = \psi_1(x)$ 從ツテ $\varphi(x) = \psi(x)$ トナル。(7) ニ關スル解ノ單獨性ガ分レバ (4) ガ (1) ニ關スル解ノ單獨條件ニナルコトヲ知ル。(8) ニ關スル解ノ單獨性ガ分ル簡單ナ場合ハ

$$\lim_{x \to 0} x\, G'(x) = 0$$

ニ依テ與ヘラレル、此ノ時ニハ (8) ノ右辺ガ η ノ減少函數トナルカラデアル、前回ニ擧ゲタ例

$$G(y) = \sqrt{|y|} + \text{Z}\, y\hat{o}s\hat{u}$$

ハ此ノ條件ヲ滿タシテヰル。

コンナワケデ從來ノ理論ガ基礎ニナルコトニ変リハナイガ、ソレヲ直接ニ應用シヨウトスルト無理ガ起リ適當ナ変換ヲ豫メ施シテ置クト都合ガヨイ場合ガ起リ得ル。ソレハ兎ニ角トシテ、(4) ヨリモツト廣イ形ノ單獨條件モ求メラレルガココマデ來レバ更ニ変ッタ現象ガアルワケデハナイカラ此ノ問題ハ此ノ辺デ一先ヅ筆ヲ擱ク。

—— 3 ——

最後ニ解ノ單獨條件ヲ證明スルノニ変數ノ変換ヲ利用スルコトハ已ニ 1930年ノ日本數學輯報デ南雲氏ガヤツテ居ラレルコトヲ注意シテ置キタイ、其処デハソレマデニ得ラレタ解

ノ單独條件ヲ簡單ニ求メラレルコトヲ示シテ居ルガ新シイ形ノモノヲ出シテ居ナイノデ案外注目ヲ惹イテ居ナイデハナイカト思ッテ一言附記スル次第デス。

前回（40号）ノ正誤

	誤	正
4頁下カラ7行目	$\frac{dy}{dx}=X$	$\frac{d\eta}{dx}=X$